COMPÉTITION MATHÉMATIQUE du MANITOBA 2014

Manitoba Association of Mathematics Teachers

Pour les étudiants en 12$^{\text{ème}}$ année
9h00 – 11h00
Jeudi 20 février 2014

Winnipeg Actuaries' Club

Soutenue par:

le Club des actuaires de Winnipeg

l'Association des enseignants de mathématiques du Manitoba

la Société mathématique du Canada

l'Université du Manitoba

University of Manitoba

Canadian Mathematical Society

Regardez les trois pages. Répondez à autant de questions que possible. Il n'est pas attendu que vous finissiez tout le devoir. **LES CALCULATRICES NE SONT PAS AUTORISÉES**. Des réponses numériques seules, sans explications, ne recevront pas la totalité des points.

---

1. (a) Une clôture est formée de piquets de 10 cm de large, un espace de 5 cm étant laissé entre piquets voisins. Déterminer la longueur de la clôture en ligne droite qui utilise exactement 50 piquets.

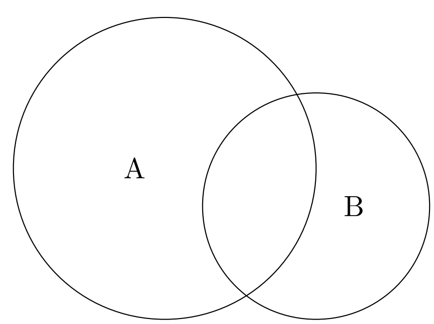
   (b) Deux sortes de piquets sont maintenant disponibles, de 10 cm et de 15 cm de large. L'espace entre piquets voisins est toujours de 5 cm. Les piquets larges et étroits doivent alterner. Déterminer la longueur de la plus longue clôture en ligne droite qui utilise exactement 27 piquets.

2. Dans $\triangle ABC$, on a $AB = 3$, $BC = 4$ et $AC = 5$.

   (a) Déterminer la longueur de l'altitude de B vers AC.

   (b) La même altitude divise $\triangle ABC$ en deux triangles plus petits. Quel est le ratio des surfaces de ces deux triangles?

3. (a) Dans le diagramme donné, la région A est de surface $\frac{4}{5}$ de celle du grand cercle et la région B est de surface $\frac{5}{7}$ de celle du petit cercle. Déterminer le ratio des surfaces de A et de B.



   (b) De 100 élèves dans une école, 50 suivent un cours de chimie et 40 suivent un cours de physique. De plus, 30 élèves suivent à la fois un cours de chimie et un cours de physique. Parmi les 100 élèves de l'école, combien ne suivent ni un cours de chimie ni un cours de physique?

4. (a) La moyenne de 2013 entiers consécutifs est 2014. Déterminer le plus petit de ces entiers.
   (b) Soit $a_1 = 2$, $a_2 = 2a_1, a_3 = 2a_2$ et ainsi de suite. C'est-à-dire que, pour $n > 1$, on a $a_n = 2a_{n-1}$. Déterminer et simplifier la valeur de

$$\sqrt[2014]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{2014}} \cdot \sqrt{2}.$$

5. (a) Déterminer toutes les valeurs possibles de A si le polynôme

$$p(x) = (x^7 - 3x^5 + Ax^4 + 2x^3 + 2x + 1)(x^4 - 3x^3 - Ax^2 + x + 2)$$

   est tel que $p(1) = -12$.
   (b) Ré-écrire le polynôme $f(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 4$ sous la forme

$$A(x+1)^4 + B(x+1)^3 + C(x+1)^2 + D(x+1) + E.$$

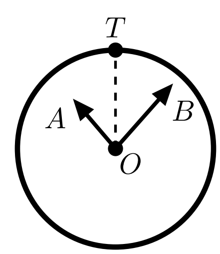
6. Un seul chiffre A et un seul chiffre B sont placés immédiatement à gauche et à droite du nombre 731, formant ainsi le nombre à cinq chiffres $A731B$. Si ce nombre à cinq chiffres est divisible par 36, déterminer toutes les possibilités pour le couple (A, B).

7. Soit le système d'équations suivant:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2a & + & b & + & c & + & d & = & 5 \\ a & + & 2b & + & c & + & d & = & 7 \\ a & + & b & + & 2c & + & d & = & 2 \\ a & + & b & + & c & + & 2d & = & 6 \end{array}$$

   (a) Résoudre pour a, b, c, d.
   (b) Vérifier que le système n'admet aucune solution si chaque "2" du système est remplacé par "-3".

8. Soit O le centre d'une horloge usuelle et soit T à la position de 12h00. Soit A l'extrémité de l'aiguille des heures et B l'extrémité de l'aiguille des minutes, tel qu'indiqué. À quelle heure entre 10h00 et 11h00, à la seconde près, avons-nous $\angle AOT$ égal a $\angle BOT$?



9. Démontrer que $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} + \sqrt{28 - 10\sqrt{3}}$ est un entier.

10. Considérer l'équation $7a + 12b = c$, où a, b et c sont des entiers non négatifs. Étant donné c, il y a parfois une solution ou plus, (a, b), à l'équation. Par exemple, si $c = 26$, alors $(2, 1)$ est la seule solution (a, b).

    (a) Si $c = 365$, déterminer toutes les solutions possibles (a, b), où a et b sont des entiers non négatifs.
    (b) Il existe certaines valeurs de c pour lesquelles il n'y a aucune solution (a, b) à l'équation précédente. Par exemple, si $c = 20$, l'équation $7a + 12b = 20$ n'a aucune solution (a, b). Déterminer la plus grande valeur de c pour laquelle il n'existe aucune solution (a, b) où a et b sont des entiers non négatifs.