COMPÉTITION MATHÉMATIQUE du MANITOBA

Pour les étudiants en 12ème année
9:00 AM – 11:00 AM
Mercredi 18 Février 2009

Soutenue par:
Club des actuaires de Winnipeg
Association des enseignants de mathématiques du Manitoba
Société mathématique du Canada
Université du Manitoba

Répondez à autant de questions que possible. Il n'est pas attendu que vous finissiez tout le devoir. Regardez les deux faces de la feuille. **LES CALCULATRICES NE SONT PAS AUTORISÉES**. Des réponses numériques sans explications ne recevront pas la totalité des points.

---

1. **(a)** La moyenne de x et y est 3. Quelle est la valeur de z si $3x - z = z - 3y$?

   (b) Si a et b sont des nombres réels qui satisfont $a - b = 3$ et $ab = 2$, quelle est la valeur de $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$?

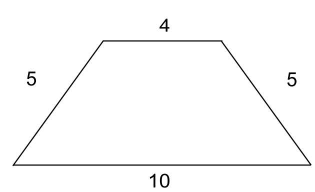
2. **(a)** Trouvez l'aire de la région bornée par l'axe des x, l'axe des y et la droite $5x + 4y = 20$.

   (b) Soit un cercle de diamètre AB, où A est le point $(3, 5)$ et B est le point $(5, 9)$. Une droite passant par l'origine divise ce cercle en deux régions d'aire égale. Trouvez la pente de cette droite.

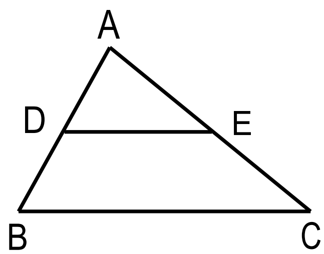
3. **(a)** Résoudre pour x: $\sqrt{3\sqrt{3}} = 3^x$.

   (b) Résoudre l'équation $x^5 - 5x^3 + 4x = 0$.

4. **(a)** Un trapèze isocèle a ses cotés parallèles de longeurs 4 et 10, comme indiqué dans le diagramme ci-contre. Trouvez son aire.



(b) Dans le triangle ABC ci-contre, D est le milieu de AB et E est le milieu de AC. Si le triangle ADE a une aire de 4, quelle est l'aire du trapèze $DECB$?



5. (a) Soit x, y et z les nombres qui satisfont les équations

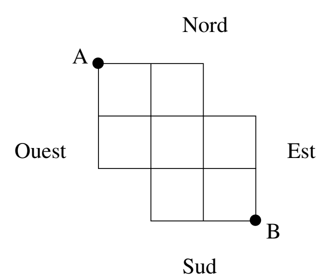
$$x + 2y + 3z = 2008 \quad \text{et} \quad 3x + 2y + z = 8002.$$

Quelle est la valeur de $x + y + z$?

(b) Résoudre l'équation $(x^2-3x+2)^2+(x^2-4x+3)^2+(x^2-5x+4)^2 = 0$.

6. Trouvez la somme des chiffres du nombre $10^{100} - 10^8 - 3$.

7. Un voyageur souhaite aller de A à B. Pour cela, il doit marcher le long de 6 blocs en suivant seulement les rues indiquées sur le diagramme ci-contre. Combien y a-t-il de routes possibles?



8. Résoudre pour x, y et z:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ x - y + z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 14. \end{aligned}$$

9. A, B et C sont des points sur un cercle de rayon 1 tels que $AB = \sqrt{2}$ et $\angle ABC = 60°$. Trouvez AC.

10. 2009 points sont choisis sur la droite AB, tous en dehors du segment AB. Prouvez que la somme des distances de ces points au point A est différente de la somme de leur distance au point B.