COMPÉTITION MATHÉMATIQUE du MANITOBA 2024

(pour les étudiants en 12$^{\text{ième}}$ année)

Mercredi 22 Février 2024, 9h00 à 11h00

Soutenue par :

Manitoba Association of Mathematics Teachers
Winnipeg Actuaries' Club
University of Manitoba
CMS SMC

☐ M.
☐ Mme.
☐ Mlle.

↑ Nom de l'étudiant (imprimer). Soulignez le nom de famille ↑

↑ Signature de l'étudiant ↑

↑ École de l'étudiant ↑

↑ Adresse de domicile de l'étudiant (ou Case postal #) ↑

↑ Ville/Village Code postal ↑

↑ Email ↑

Instructions pour les élèves : Avant que le concours commence, veuiller fournir les informations personnelles ci-haut. Ne placer aucune information personnelle permettant de vous identifier sur une quelconque autre page. Vous devriez avoir reçu 12 feuilles de papier (ou 24 si papier recto) au total, incluant celle-ci.

Répondre à toute question sur la feuille où elle se trouve. Vous pouvez utiliser les deux côtés de la feuille (sauf impression recto). Le dernières feuilles avec le code QR sont fournies pour les brouillons et pour compléter vos solutions en cas de manque d'espace—voir aussi les instructions à la page 23. Le travail sur ces pages ne sera pas crédité à moins qu'il soit clairement indiqué à quelle question se réfère cette suite, puis que cette page soit spécifiée sur la page où le travail a débuté.

Lors de votre résolution d'une question particulière, ne pas référer au travail touchant d'autres questions ; les questions sont corrigées indépendamment.

Aucune aide est permise—aucune règle, compas ou autre appareil de dessin, instrument électronique (téléphone cellulaire, montre électronique, traducteur, tablette, calculatrice etc.).

Cet espace peut être utilisé pour le travail de brouillon, mais ne continuez pas les solutions sur cette page. Aucun crédit ne sera accordé pour le travail apparaissant ici.

$\boxed{\textbf{Question 1}}$

(a) Pour combien de valeurs réelles de y l'affirmation

$$\frac{y}{3+y} = \frac{1}{1+\frac{3}{y}}$$

est-elle valide ?

(b) Pour combien de valeurs réelles de x l'affirmation

$$\frac{x+3}{x} = \frac{1}{1+\frac{x}{3}}$$

est-elle valide ?

Cet espace peut être utilisé pour continuer votre solution pour la question 1; il peut être poursuivi à la page 23 ou 24—voir les instructions à la page 23.

Question 2

(a) Déterminer un entier positif n tel que

$$\frac{1}{4n} - \frac{1}{4n+4} = \frac{1}{2024}.$$

(b) Est-ce que 2024 est la somme de sept entiers positifs consécutifs ? Fournir une justification brève en appui à votre réponse.

Cet espace peut être utilisé pour continuer votre solution pour la question 2; il peut être poursuivi à la page 23 ou 24—voir les instructions à la page 23.

Question 3

Christian travaille dans un centre de distribution, ses fonctions étant de bourrer des enveloppes, dont il en reçoit $2n$ chaque matin. Or, Christian venait tout juste de bourrer n enveloppes, à un taux moyen de 200 enveloppes par heure lorsqu'il a reçu un mémo annonçant qu'un bonus de 100$ sera payé à tout employé réussissant à bourrer ses enveloppes à un taux moyen de 300 enveloppes par heure pour la journée ; de façon similaire, un bonus de 200$ sera payé à tout employé réussissant à bourrer ses enveloppes à un taux moyen de 400 enveloppes par heure pour la journée.

(a) À quel taux Christian doit-il bourrer les n enveloppes restantes afin de se mériter le bonus de 100$?

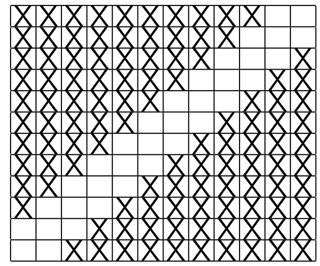
(b) À quel taux Christian doit-il bourrer les n enveloppes restantes afin de se mériter le bonus de 200$?

Cet espace peut être utilisé pour continuer votre solution pour la question 3; il peut être poursuivi à la page 23 ou 24—voir les instructions à la page 23.

Question 4

Un grillage 12×12 a des blocages dans tous ses carrés sauf ceux formant les trois diagonales ascendantes indiquées. On se déplace du coin à gauche en bas vers le coin à droite en haut, en bougeant un carré sans blocage à la fois, toujours vers la droite ou vers le haut. Le nombre de tels trajets est-il plus grand que, égal à, ou plus petit que 2024 ?

Justifier votre réponse.



Cet espace peut être utilisé pour continuer votre solution pour la question 4; il peut être poursuivi à la page 23 ou 24—voir les instructions à la page 23.

$\boxed{\textbf{Question 5}}$

Déterminer la moyenne de 6 nombres a, b, c, d, e, f, tels que

$$\begin{aligned} 3a + 2b &= c \\ 3b + 2c &= d \\ 3c + 2d &= e \\ 3d + 2e &= f \\ 3e + 2f &= a \\ 3f + 2a &= b + 2024 \end{aligned}$$

Cet espace peut être utilisé pour continuer votre solution pour la question 5; il peut être poursuivi à la page 23 ou 24—voir les instructions à la page 23.

Question 6

Soient a, b, c des entiers positifs. Réécrire l'expression

$$\frac{1}{a+b+c}\left[\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{a(a+c)}+\frac{1}{c(a+c)}+\frac{1}{b(b+c)}+\frac{1}{c(b+c)}\right]$$

comme une seule fraction simple.

Cet espace peut être utilisé pour continuer votre solution pour la question 6; il peut être poursuivi à la page 23 ou 24—voir les instructions à la page 23.

$\boxed{\textbf{Question 7}}$

Pour des angles mesurés en degrés, soit la fonction

$$f(x) = \frac{n + (5n + 2)\sin^2(90n)}{2}.$$

Soient alors $f^2(x) = f(f(x)), f^3(x) = f(f(f(x))) = f(f^2(x))$ et de façon plus générale, pour $n > 1$, $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$.

Démontrer que, pour au moins un entier positif n, on a $f^n(7) = 1$ déterminer le plus petit tel n.

Cet espace peut être utilisé pour continuer votre solution pour la question 7; il peut être poursuivi à la page 23 ou 24—voir les instructions à la page 23.

Question 8

Démontrer qu'il existe des entiers positifs distincts $a, b, c, d > 1$ tels que

$$d^{2024} - c^4 = c^4 - b^3 = b^3 - a^2,$$

et fournir un exemple de tels nombres.

Cet espace peut être utilisé pour continuer votre solution pour la question 8; il peut être poursuivi à la page 23 ou 24—voir les instructions à la page 23.

Question 9

(a) Écrire 2024 sous la forme sont des entiers distincts, c'est-à-dire exprimer 2024 comme somme ou différence de puissances distinctes de 3.

$$\pm 3^{a_1} \pm 3^{a_2} \pm \cdots \pm 3^{a_t},$$

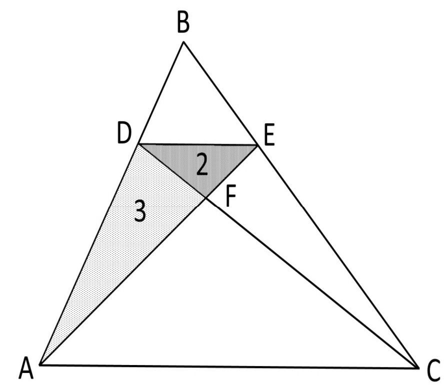
où $a_1, \ldots, a_t$ sont des entiers distincts, c'est-à-dire exprimer 2024 comme somme ou différence de puissances distinctes de 3.

(b) Démontrer que tout entier n, positif ou négatif, peut être exprimé comme somme ou différence de puissances distinctes de 3, le nombre de termes pouvant être 0 ou un entier positif.

Cet espace peut être utilisé pour continuer votre solution pour la question 9; il peut être poursuivi à la page 23 ou 24—voir les instructions à la page 23.

Question 10

Pour $\triangle ABC$, les points D et E sont choisis sur les côtés AB et BC, de façon à ce que DE soit parallèle à AC. Soit alors F le point de rencontre des lignes AE et CD. Sachant que la surface de $\triangle ADF$ est de 3 et que la surface de $\triangle DEF$ est de 2, déterminer la surface de $\triangle ABC$.



Cet espace peut être utilisé pour continuer votre solution pour la question 10; il peut être poursuivi à la page 23 ou 24—voir les instructions à la page 23.

Les deux côtés de cette page peuvent être utilisés pour la poursuite de solutions ou pour un travail de brouillon.

Pour recevoir des crédits pour le travail continué ici:

1. Indiquez clairement dans votre solution qu'elle se poursuit ici.
2. Indiquez clairement ici la question qui se poursuit (par exemple, "Q7 (suite)").
3. Séparez clairement le travail continu des différentes questions et des calculs à partir de zéro.

Cet espace peut être utilisé pour le travail de brouillon ou pour continuer les solutions—voir les instructions à la page 23.