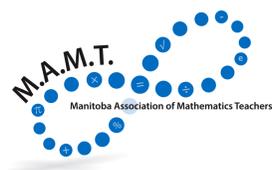


COMPÉTITION MATHÉMATIQUE du MANITOBA 2020

(pour les étudiants en 12^{ième} année)

Mardi 25 Février 2020, 9h00 à 11h00

Soutenu par :



UNIVERSITY
OF MANITOBA



-
- M.
 Mme.
 Mlle.

↑ Nom de l'étudiant (imprimer). Soulignez le nom de famille ↑

↑ Signature de l'étudiant ↑

↑ École de l'étudiant ↑

↑ Adresse de domicile de l'étudiant (ou Case postal #) ↑

↑ Ville/Village

Code postal ↑

Instructions pour les élèves : Avant que le concours commence, veuillez fournir les informations personnelles ci-haut. Ne placer aucune information personnelle permettant de vous identifier sur une quelconque autre page. Vous devriez avoir reçu 12 feuille de papier (ou 24 si papier recto) au total, incluant celle-ci.

Répondre à toute question sur la feuille où elle se trouve. Vous pouvez utiliser les deux côtés de la feuille (sauf impression recto). Les dernières feuilles avec le code QR sont fournies pour les brouillons et pour compléter vos solutions en cas de manque d'espace—voir aussi les instructions à la page 23. Le travail sur ces pages ne sera pas crédité à moins qu'il soit clairement indiqué à quelle question se réfère cette suite, puis que cette page soit spécifiée sur la page où le travail a débuté.

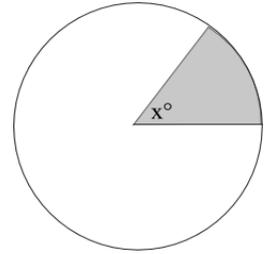
Lors de votre résolution d'une question particulière, ne pas référer au travail touchant d'autres questions ; les questions sont corrigées indépendamment.

Aucune aide est permise—aucune règle, compas ou autre appareil de dessin, instrument électronique (téléphone cellulaire, montre électronique, traducteur, tablette, calculatrice etc.).

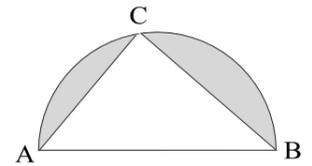
Cet espace peut être utilisé pour le travail de brouillon, mais ne continuez pas les solutions sur cette page. Aucun crédit ne sera accordé pour le travail apparaissant ici.

Question 1

- (a) Un secteur d'un cercle a un angle au centre de x° et une surface de $18\pi \text{ cm}^2$. Si le rayon du cercle est de 12 cm, déterminer x .



- (b) AB est le diamètre d'un cercle de rayon 5 cm. Si C est un point sur le cercle tel que $AC = 6 \text{ cm}$, déterminer la surface ombragée.



Cet espace peut être utilisé pour continuer votre solution pour la question 1; il peut être poursuivi à la page 23 ou 24—voir les instructions à la page 23.

Question 2

- (a) 1 \$ est investi à 100 % d'intérêt, composé annuellement. Dans combien d'années l'investissement aura-t-il dépassé 2020 \$?
- (b) Combien de diviseurs entiers positifs distincts 2020 a-t-il ?

Cet espace peut être utilisé pour continuer votre solution pour la question 2; il peut être poursuivi à la page 23 ou 24—voir les instructions à la page 23.

Question 3

- (a) Un cercle de rayon $r > 0$ est centré à chacun des sommets d'un triangle équilatéral de côtés de longueur 1. Les trois cercles possèdent une ligne tangente commune. Déterminer r .
- (b) Déterminer toutes paires d'entiers a, b telles que $a + b = ab$.

Cet espace peut être utilisé pour continuer votre solution pour la question 3; il peut être poursuivi à la page 23 ou 24—voir les instructions à la page 23.

Question 4

- (a) Pour trois nombres, les sommes deux par deux sont 7, 11 et 15. Quels sont les trois nombres ?
- (b) x est un nombre à deux chiffres ; y utilise les mêmes chiffres, mais dans l'ordre opposé. Si $y^2 - x^2$ est un carré parfait, déterminer x .

Cet espace peut être utilisé pour continuer votre solution pour la question 4; il peut être poursuivi à la page 23 ou 24—voir les instructions à la page 23.

Question 5

- (a) Utilisant uniquement un crayon et une règle non graduée, il est possible de déterminer exactement le centre d'un pentagone régulier. Expliquer comment.
- (b) Démontrer qu'il existe des nombres irrationnels a et b tels que a^b est rationnel.

Cet espace peut être utilisé pour continuer votre solution pour la question 5; il peut être poursuivi à la page 23 ou 24—voir les instructions à la page 23.

Question 6

Déterminer deux nombres x et y tels que

$$\sin(18(x(x - 6) + 10)) = y(y - 6) + 10,$$

où la fonction \sin s'applique à des angles exprimés en degrés.

Cet espace peut être utilisé pour continuer votre solution pour la question 6; il peut être poursuivi à la page 23 ou 24—voir les instructions à la page 23.

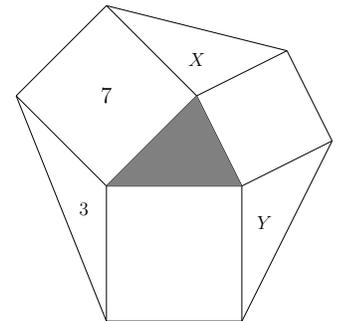
Question 7

A, B, C sont trois points dans le plan xy , ayant des coordonnées entières. AB est un segment vertical de longueur 2020 ; BC est horizontal de longueur 36. Déterminer le nombre de points à l'intérieur de $\triangle ABC$ ayant des coordonnées entières.

Cet espace peut être utilisé pour continuer votre solution pour la question 7; il peut être poursuivi à la page 23 ou 24—voir les instructions à la page 23.

Question 8

Trois carrés sont érigés à l'extérieur des côtés d'un triangle et les espaces entre eux forment trois autres triangles, tel qu'indiqué. Un de ces trois triangles a une surface de 3 et un de ses carrés adjacents a une surface de 7. Déterminer les surfaces X et Y des deux autres triangles ajoutés à l'extérieur du triangle original. (Voir diagramme.)



Cet espace peut être utilisé pour continuer votre solution pour la question 8; il peut être poursuivi à la page 23 ou 24—voir les instructions à la page 23.

Question 9

Les côtés de $\triangle ABC$ sont de longueurs 13, 14 et 15 ; les altitudes se rencontrent en H . Si AD est l'altitude correspondant au côté BC de longueur 14, déterminer le ratio $AH : AD$.

Cet espace peut être utilisé pour continuer votre solution pour la question 9; il peut être poursuivi à la page 23 ou 24—voir les instructions à la page 23.

Question 10

Une **puissance de premier** est un nombre de la forme $q = p^a$ où p est premier et a est un entier non négatif. Par exemple, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 sont tous des puissances de premiers mais 6 et 10 ne le sont pas. Déterminer tous les triplets Pythagoriciens de puissances de premiers, c'est-à-dire trois puissances de premiers x, y, z tels que

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Cet espace peut être utilisé pour continuer votre solution pour la question 10; il peut être poursuivi à la page 23 ou 24—voir les instructions à la page 23.

Les deux côtés de cette page peuvent être utilisés pour la poursuite de solutions ou pour un travail de brouillon.

Pour recevoir des crédits pour le travail continué ici:

1. Indiquez clairement dans votre solution qu'elle se poursuit ici.
2. Indiquez clairement ici la question qui se poursuit (par exemple, "Q7 (suite)").
3. Séparez clairement le travail continu des différentes questions et des calculs à partir de zéro.

Cet espace peut être utilisé pour le travail de brouillon ou pour continuer les solutions—voir les instructions à la page 23.