COMPÉTITION MATHÉMATIQUE du MANITOBA 2023

(pour les étudiants en 12$^{\text{ième}}$ année)

Mercredi 22 Février 2023, 9h00 à 11h00

Soutenue par :

Winnipeg Actuaries' Club

UNIVERSITY OF MANITOBA

CMS SMC

☐ M.
☐ Mme.
☐ Mlle.

↑ Nom de l'étudiant (imprimer). Soulignez le nom de famille ↑

↑ Signature de l'étudiant ↑

↑ École de l'étudiant ↑

↑ Adresse de domicile de l'étudiant (ou Case postal #) ↑

↑ Ville/Village   Code postal ↑

↑   Email   ↑

Instructions pour les élèves : Avant que le concours commence, veuiller fournir les informations personnelles ci-haut. Ne placer aucune information personnelle permettant de vous identifier sur une quelconque autre page. Vous devriez avoir reçu 12 feuilles de papier (ou 24 si papier recto) au total, incluant celle-ci.

Répondre à toute question sur la feuille où elle se trouve. Vous pouvez utiliser les deux côtés de la feuille (sauf impression recto). Le dernières feuilles avec le code QR sont fournies pour les brouillons et pour compléter vos solutions en cas de manque d'espace—voir aussi les instructions à la page 23. Le travail sur ces pages ne sera pas crédité à moins qu'il soit clairement indiqué à quelle question se réfère cette suite, puis que cette page soit spécifiée sur la page où le travail a débuté.

Lors de votre résolution d'une question particulière, ne pas référer au travail touchant d'autres questions ; les questions sont corrigées indépendamment.

Aucune aide est permise—aucune règle, compas ou autre appareil de dessin, instrument électronique (téléphone cellulaire, montre électronique, traducteur, tablette, calculatrice etc.).

Cet espace peut être utilisé pour le travail de brouillon, mais ne continuez pas les solutions sur cette page. Aucun crédit ne sera accordé pour le travail apparaissant ici.

Question 1

(a) Si $x = 4$, déterminer la valeur de $\sqrt{x + \sqrt{6x+1}}$.

(b) Trouver une paire d'entiers positifs distincts x et y tels que $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2}$.

Cet espace peut être utilisé pour continuer votre solution pour la question 1; il peut être poursuivi à la page 23 ou 24—voir les instructions à la page 23.

Question 2

(a) Un ensemble d'entiers consécutifs a une moyenne de 37. Le troisième nombre et le sixième nombre, dans l'ordre, ont une somme de 19. Déterminer le plus grand des nombres.

(b) Suzanne a écrit deux nombres entiers positifs consécutifs sur une feuille de papier. Elle a ensuite multiplié chacun d'eux par deux et a élevé les résultats au carré. La différence entre les carrés résultants était de 84. Quels étaient les nombres originaux ?

Cet espace peut être utilisé pour continuer votre solution pour la question 2; il peut être poursuivi à la page 23 ou 24—voir les instructions à la page 23.

Question 3

(a) Azeen a conduit sa voiture une distance de 160 km. Il a parcouru les 40 premiers kilomètres, à une vitesse moyenne de 50 km/h. Pour le reste du trajet, il a roulé en moyenne à 100 km/h. Quelle a été sa vitesse moyenne pendant tout le trajet ?

(b) Glenda a passé trois tests de mathématiques et a obtenu des notes supérieures à 50 sur chacun d'eux. Elle a calculé sa note moyenne et a obtenu un résultat de 48. Elle savait que cela ne pouvait pas être vrai. Lorsqu'elle a vérifié son travail, elle a découvert qu'elle avait échangé les deux chiffres de sa note la plus basse. Elle a ensuite déterminé correctement sa moyenne à 57. Quelle était sa note la plus basse ?

Cet espace peut être utilisé pour continuer votre solution pour la question 3; il peut être poursuivi à la page 23 ou 24—voir les instructions à la page 23.

Question 4

(a) Déterminer toutes les paires ordonnées (m, n) où m et n sont des entiers satisfaisant

$$(m-2)^2(n+1) = 72.$$

(b) Les chiffres 1, 2, 3, 4 peuvent être arrangés (sans répétitions) pour former 24 nombres différents à quatre chiffres. Quelle est la somme de ces nombres ?

Cet espace peut être utilisé pour continuer votre solution pour la question 4; il peut être poursuivi à la page 23 ou 24—voir les instructions à la page 23.

Question 5

Dans chaque cas, résoudre pour x.

(a) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{2}+1}$

(b) $\left(x^2-3x\right)^2 - 8 = 2\left(x^2-3x\right)$

Cet espace peut être utilisé pour continuer votre solution pour la question 5; il peut être poursuivi à la page 23 ou 24—voir les instructions à la page 23.

Question 6

Si p et q sont des entiers impairs, prouver que

$$x^2 + 2px + 2q = 0$$

n'a pas de racines rationnelles.

Cet espace peut être utilisé pour continuer votre solution pour la question 6; il peut être poursuivi à la page 23 ou 24—voir les instructions à la page 23.

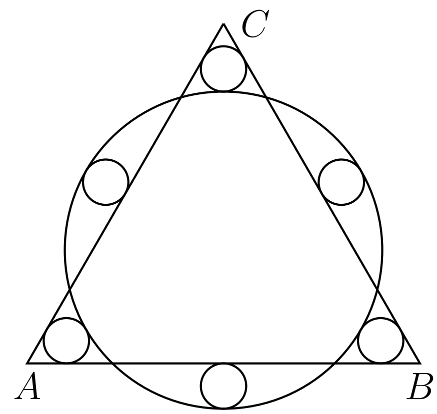
Question 7

Un couloir comporte sept lumières numérotées de 1 à 7, chacune avec son propre interrupteur. Au départ, toutes les lumières sont allumées. Adam fait une sélection aléatoire de trois lumières qu'il éteint. Betty fait une sélection aléatoire de trois lumières et change leur statut (si une lumière était allumée, elle l'éteint et vice versa). Chris fait alors une sélection aléatoire de trois lumières et change leur statut. Quelle est la probabilité que toutes les lumières aient été ainsi éteintes ?

Cet espace peut être utilisé pour continuer votre solution pour la question 7; il peut être poursuivi à la page 23 ou 24—voir les instructions à la page 23.

Question 8

Six petits cercles ont chacun un rayon d'une unité. Chacun est tangent à un cercle plus grand, comme indiqué, trois d'entre eux sont également tangents à deux côtés d'un triangle équilatéral $\triangle ABC$, et les trois autres sont chacun tangents à un côté de $\triangle ABC$ en son milieu. Déterminer le rayon du plus grand cercle.



Cet espace peut être utilisé pour continuer votre solution pour la question 8; il peut être poursuivi à la page 23 ou 24—voir les instructions à la page 23.

$\boxed{\textbf{Question 9}}$

Pour combien d'entiers positifs $n \leq 100$ la fraction $\dfrac{17n+4}{4n+3}$ est-elle réductible ?
(Remarque : Une fraction est réductible si elle est équivalente à une autre fraction avec un plus petit dénominateur. Par exemple, $\dfrac{4}{6}$ est réductible car elle équivaut à $\dfrac{2}{3}$ alors que $\dfrac{5}{6}$ n'est pas réductible.)

Cet espace peut être utilisé pour continuer votre solution pour la question 9; il peut être poursuivi à la page 23 ou 24—voir les instructions à la page 23.

Question 10

Les arêtes d'un solide rectangulaire sont toutes de longueurs entières. Soient p et q des nombres premiers impairs. Exactement cinq de ces solides ont un volume de $2pq$; leurs dimensions sont $2 \times p \times q$, $1 \times 2p \times q$, $1 \times p \times 2q$, $1 \times 2 \times pq$ et $1 \times 1 \times 2pq$.

(a) Combien y a-t-il de solides possibles si le volume doit être $4pq$?

(b) Combien y a-t-il de solides possibles si le volume est $2^{2n}pq$ où n est un entier positif ? Exprimez votre réponse en termes de n.

Cet espace peut être utilisé pour continuer votre solution pour la question 10; il peut être poursuivi à la page 23 ou 24—voir les instructions à la page 23.

Les deux côtés de cette page peuvent être utilisés pour la poursuite de solutions ou pour un travail de brouillon.

Pour recevoir des crédits pour le travail continué ici:

1. Indiquez clairement dans votre solution qu'elle se poursuit ici.
2. Indiquez clairement ici la question qui se poursuit (par exemple, "Q7 (suite)").
3. Séparez clairement le travail continu des différentes questions et des calculs à partir de zéro.

Cet espace peut être utilisé pour le travail de brouillon ou pour continuer les solutions—voir les instructions à la page 23.