COMPÉTITION MATHÉMATIQUE du MANITOBA 2017

Pour les étudiants en 12ième année
9:00 AM – 11:00 AM
Mardi 28 fevrier 2017

Manitoba Association of Mathematics Teachers

Winnipeg Actuaries' Club

Soutenue par:

Club des actuaires de Winnipeg

Association des enseignants de mathématiques du Manitoba

Société mathématique du Canada

Université du Manitoba

University of Manitoba

Canadian Mathematical Society

Les questions sont au recto et au verso de cette page. Répondez à autant de questions que possible. Il n'est pas attendu que vous finissiez tout le devoir. **LES CALCULATRICES NE SONT PAS AUTORISÉES**. Des réponses numériques seules, sans explications, ne recevront pas la totalité des points.

---

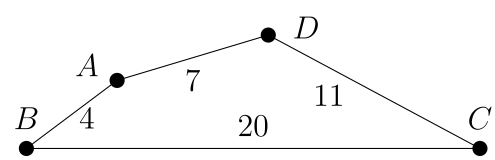
1. (a) De combien de manières peut-on échanger un billet de 20 \$ en pièces de dix cents et pièces de vingt-cinq cents si on doit utiliser au moins une pièce de chaque sorte ?

   (b) Une boîte contient 5 pièces de cinq cents et 5 pièces de dix cents. Deux pièces sont sélectionnées au hasard. Quelle est la probabilité que la valeur totale des pièces sélectionnées soit plus petite ou égale à 15 cents ?

2. (a) Sur un échiquier normal 8×8, un des 64 carrés unitaires est choisi au hasard. Déterminer la probabilité que le carré choisi n'a aucun bord en commun avec le périmètre de l'échiquier.

   (b) Déterminer le nombre de mots différents à deux lettres qu'on peut former se servant des lettres de l'expression TRAP CARDS. (Un mot à deux lettres consiste d'une paire de lettres dans un ordre précis. Une lettre peut être utilisée deux fois si on la retrouve deux fois dans l'expression ci-haut.)

3. (a) Les côtés du quadrilatère ABCD sont comme suit : $AB = 4$, $AD = 7$, $BC = 20$ et $DC = 11$. Étant donné que AC est entier, déterminer sa valeur.



   (b) Les entiers positifs a, b, c et d sont additionnés trois à la fois. Les sommes sont 93, 96, 105 et 114. Quelle est la plus grande valuer parmi a, b, c et d et quelle est cette valeur?

4. (a) Supposer qu'une feuille de papier rectangulaire, lorsque pliée en deux et coupée le long du pli, forme deux feuilles plus petites avec le même rapport de longueur à largeur que la feuille originale. Déterminer ce rapport de longueur à largeur. Justifier votre réponse.
   (b) Si la feuille de papier originale, décrite ci-haut, a une surface de 1 m^2, nous l'appèlerons feuille de papier A0. Elle peut être pliée en deux et coupée pour former deux feuilles A1. Celles-ci peuvent être pliées et coupées pour former des feuilles A2. Continuant ce processus, nous obtenons des feuilles de papier A3 et A4. La feuille de papier A4 est utilisée dans les bureaux de la plupart des pays comme feuille de papier générique. Cette feuille de papier A4 est de taille 2^a métres par 2^b métres. Déterminer a et b.

5. (a) Les deux chiffres d'un nombre K à deux chiffres (écrit en notation standard) sont non nuls. Lorsque leur ordre est renversé, le nouveau nombre est 45 moins que K. Déterminer toute valeur possible pour K.
   (b) N est un entier strictement entre 10^3 et 10^4. Renversant les chiffres de N conduit à un entier M, lui aussi strictement entre 10^3 et 10^4. De plus, M et N sont tous les deux divisibles par 45. Déterminer toute valeur possible pour N.

6. Combien de fois devons-nous tirer à pile ou face une pièce de monnaie non biaisée de façon à assurer que la probabilité de constater au moins trois piles ou faces consécutives est de 50 % ou plus ? Justifier votre réponse.

7. Si b et c sont des entiers impairs, démontrer que l'équation quadratique

$$x^2 + 2bx + c = 0$$

ne peut pas avoir des racines rationnelles.

8. Un quadrilatère convexe a des côtés de longueurs a, b, c, d où les côtés de longueurs a et c sont opposés. Démontrer que si $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ alors les deux diagonales du quadrilatère sont perpendiculaires.

9. Combien de solutions l'équation

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 + \cdots + x_{122}x_{123} + x_{123}^2 = 1$$

possède-t-elle en entiers $x_1, x_2, ..., x_{123}$? Il devrait être clair par votre travail que vous avez déterminé toutes les solutions.

10. Si α est une chaîne de 0s et de 1s, dénotons par $\overline{\alpha}$ la chaîne obtenue en remplaçant chaque 0 par 1 et chaque 1 par 0. Si β est une autre chaîne, dénotons par $\alpha\beta$ la chaîne obtenue en concaténant α et β. Par exemple, si $\alpha = 011101$ et $\beta = 110110$, alors $\alpha\overline{\beta} = 011101001001$.

    Définir une suite de chaînes comme suit : $\alpha_0 = 0$ et pour tout $n > 0$, $\alpha_n = \alpha_{n-1}\overline{\alpha_{n-1}}$. Ainsi $\alpha_1 = 01$ et $\alpha_2 = 0110$. Dénombrer les positions dans chaque chaîne de la façon usuelle : les 1^{e}, 2^{e}, 3^{e} et 4^{e} positions de α_2 sont 0, 1, 1 et 0 respectivement.

    Démontrer que si α_n a au moins 2017 positions, alors le symbole en 2017^{e} position est indpendant de n, et déterminer ce symbole.