

COMPÉTITION MATHÉMATIQUE du MANITOBA 2016

Pour les étudiants en 12^{ième} année
9:00 AM – 11:00 AM
Mercredi 24 février 2016



Manitoba Association of
Mathematics Teachers

Soutenue par:

Club des actuaires de Winnipeg

Association des enseignants de mathématiques du Manitoba

Société mathématique du Canada

Université du Manitoba



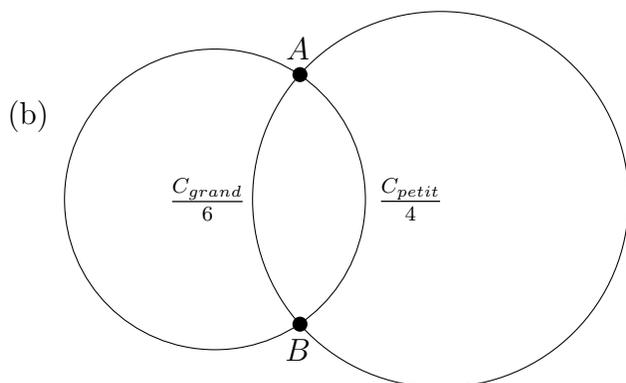
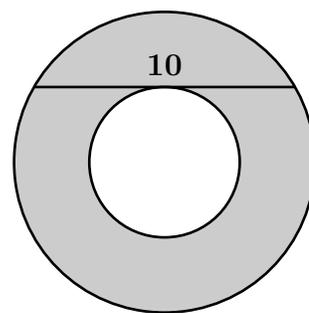
UNIVERSITY
OF MANITOBA



Les questions sont au recto et au verso de cette page. Répondez à autant de questions que possible. Il n'est pas attendu que vous finissiez tout le devoir. **LES CALCULATRICES NE SONT PAS AUTORISÉES.** Des réponses numériques seules, sans explications, ne recevront pas la totalité des points.

- Quelle est la somme des chiffres dans $N = 2^8 5^4$?
 - Déterminer le plus grand entier à trois chiffres qui est divisible par 5 et par 6.
- Un triangle a , au départ, une surface de 100 unités carrées. Si sa base est augmentée par 10% et son altitude est réduite par 10%, quelle est sa nouvelle surface ?
 - Quel nombre est deux tiers de la distance de $\frac{1}{7}$ à $\frac{1}{5}$ sur l'axe réel ?

- Deux cercles ont le même centre O . Une corde AB du plus grand cercle, tangente au plus petit cercle, est de longueur 10. Quelle est la surface de l'anneau entre les cercles ?



Deux cercles intersectent aux points A and B . La longueur de l'arc \widehat{AB} sur le plus petit cercle mesure $\frac{1}{4}$ de sa circonférence. La longueur de l'arc correspondant sur le plus grand cercle mesure $\frac{1}{6}$ de sa circonférence. Si la surface du plus petit cercle est 12, quelle est la surface du plus grand cercle ?

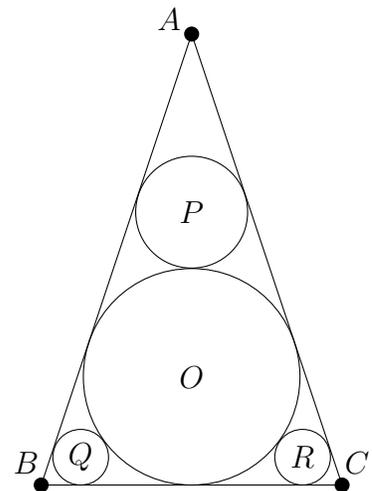
4. (a) La somme de deux nombres est 10 et leur produit est 20. Quelle est la somme de leurs cubes ?
- (b) Peut-on rendre l'expression $1 * 2 * 3 * \dots * 10$ égale à 0 en remplaçant chaque instance de " $*$ " par soit "+" soit "-" ?

5. Définir une operation, $*$ sur les nombres réels positifs comme suit :

$$a * b = \frac{ab}{a + b}.$$

- (a) Vérifier que $(2 * 2) * 3$ est égal à $2 * (2 * 3)$.
- (b) Est-ce toujours le cas que $a * (b * c) = (a * b) * c$? Justifier votre réponse.
6. Combien d'entiers positifs différents n ont la propriété que $n^2 - 2016$ est un carré parfait ? Déterminer le plus petit tel nombre.
7. Combien des 2016 premiers entiers positifs sont divisibles par aucun de 7, 9 et 32 ?
8. Soit $a_k = \frac{1}{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1}}$. Déterminer n tel que $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 8$.

9. Un cercle O est inscrit dans un triangle isocèle $\triangle ABC$ (voir le diagramme), où $AB = AC$. Les cercles P, Q et R sont chacun tangents à l'externe à deux côtés de ce triangle et, à l'externe, à O tel qu'illustré. Le rayon de O est de 2 unités et le rayon de P est de 1 unité. Déterminer les rayons des deux autres cercles.



10. Soit x, y et z des nombres réels tels que $x + y + z = 15$ et $xy + yz + zx = 72$. Démontrer que $3 \leq x \leq 7$.