COMPÉTITION MATHÉMATIQUE du MANITOBA 2012

Pour les étudiants en 12$^{\text{ème}}$ année
9h00 – 11h00
Jeudi 23 fevrier 2012

Soutenue par:

le Club des actuaires de Winnipeg

l'Association des enseignants de mathématiques du Manitoba

la Société mathématique du Canada

l'Université du Manitoba

Regardez les deux faces de la feuille. Répondez à autant de questions que possible. Il n'est pas attendu que vous finissiez tout le devoir. **LES CALCULATRICES NE SONT PAS AUTORISÉES**. Des réponses numériques seules, sans explications, ne recevront pas la totalité des points.

---

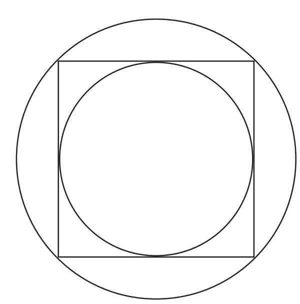
1. (a) Trouvez trois nombres entiers pairs consécutifs dont la somme est 36.

   (b) Trouvez trois nombres entiers consécutifs tels que la somme du plus petit et deux fois le plus grand soit plus grande de 15 que le nombre entier intermédiaire.

2. (a) Trouvez le nombre à mi-chemin entre $\frac{2}{5}$ et $\frac{5}{8}$.

   (b) De combien de pourcent augmente-t-on une quantité si on l'augmente deux fois de 10%?

3. (a) Un cercle a une aire de 5 unités de surface. Un carré est construit autour du cercle tel que chaque côté du carré est tangent au cercle. Un cercle plus grand est construit autour du carré de telle manière qu'il passe par les quatre sommets du carré. Trouvez l'aire du plus grand cercle.



   (b) Un réservoir rectangulaire de 2 mètres de longueur, 3 mètres de largeur et 3 mètres de hauteur est rempli d'eau. Un réservoir cylindrique de 2 mètres de rayon et 3 mètres de hauteur est vide. L'eau est siphonée depuis le réservoir rectangulaire vers le réservoir cylindrique. Le siphon s'arrêtera de couler lorsque la hauteur d'eau sera la même dans les deux réservoirs. Quelle sera la hauteur à ce moment?

4. (a) Les chiffres 1, 2, 3, 4 peuvent être arrangés pour former un nombre de quatre chiffres de 24 façons différentes. Quelle est la somme de ces 24 nombres de quatre chiffres?

   (b) Donnez x^4+4 comme le produit de deux polynomes quadratiques à coefficients entiers.

5. (a) Trouvez la valeur de x pour laquelle $\sqrt{x}-1$ et $\sqrt{x}+1$ sont inverses.

   (b) Prouvez qu'il n'y a pas de valeur réelle de x pour laquelle x et $1-2x$ soient inverses.

6. Pour représenter un nombre en base autre que 10, disons en base B, utilisons l'expression "S_B" où S est la chaine appropriée de chiffres possibles en base B (c'est à dire, des éléments de l'ensemble $\{0,1,2,\ldots,B-1\}$). (Si aucune base est donnée, il est entendu qu'un nombre est écrit en base 10.) Ainsi, $112_3 = 1\cdot 3^2+1\cdot 3+2 = 14$ et $1036_7 = 1\cdot 7^3+0\cdot 7^2+3\cdot 7+6 = 370$.

   (a) Dans quelle base B, 213_B est-il égal à 58?

   (b) Evaluez l'expression suivante. Ecrivez votre réponse en base 10.

$$2012_{\left(22_{\left(12_{\left(21_{(11_2)}\right)}\right)}\right)}$$

7. Dans l'équation polynomiale

$$x^7+3x^6+2x^5+4x^4+12x^3+x^2+x-2 = (x^2+3x+2)q(x)+ax+b,$$

   trouvez les valeurs de a et b.

8. Une droite de pente positive passe par l'origine et est tangente au cercle $(x-5)^2+y^2=9$. Trouvez l'équation de cette droite.

9. Soit A le point $(4,9)$ et B le point $(10,5)$. Un insecte très petit commence en A, rampe jusqu'à un point C sur l'axe des x, et rampe ensuite jusqu'au point B. S'il prend le plus court chemin, trouvez la distance parcourue et les coordonnées du point C.

10. Un carré d'aire 1 est divisé en trois rectangles qui sont géométriquement similaires (i.e., les rapports entre les longueurs des côtés longs sur les longueurs des côtés courts sont les mêmes) mais aucun de ces rectangles est congru à un autre. Nommez A, B et C les aires des rectangles ordonnés du plus grand au plus petit. Prouvez que $(AC)^2 = B^5$.