COMPÉTITION MATHÉMATIQUE du MANITOBA
2011

Pour les étudiants en 12$^{\text{ème}}$ année
9h00 – 11h00
Jeudi 24 fevrier 2011

Soutenue par:

le Club des actuaires de Winnipeg
l'Association des enseignants de mathématiques du Manitoba
la Société mathématique du Canada
l'Université du Manitoba

Répondez à autant de questions que possible. Il n'est pas attendu que vous finissiez tout le devoir. **LES CALCULATRICES NE SONT PAS AUTORISÉES**. Des réponses numériques seules, sans explications, ne recevront pas la totalité des points.

---

1. (a) Un carré a une diagonale de longueur 10 cm. Trouver l'aire du carré.

   (b) $ABCD$ est un carré. AB et CD sont augmentés de 10% tandis que BC et DA sont diminués de 10%. De quel pourcentage l'aire change-t-elle?

2. Sur une droite numérotée (graduée) le point A est situé à $\frac{1}{5}$ et le point B est situé à $\frac{1}{3}$.

   (a) Le point C est à mi-chemin entre A et B. Où est placé C?

   (b) Le point D est à droite de B. Si $BD = 2(AB)$, trouver la position de D.

3. (a) Résoudre pour x: $\frac{1}{4}(2^{4x}) = 32$

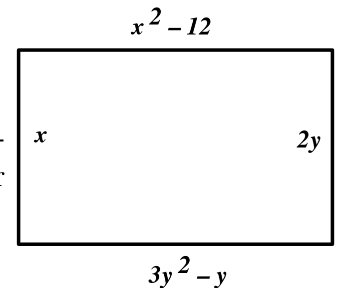
   (b) Résoudre pour x et y:

$$\begin{aligned} 2^x - y &= 7 \\ 2^{x+1} + 2y &= 2 \end{aligned}$$

4. (a) Soit n le produit des 30 premiers entiers positifs. Combien de zéros sont-ils placés à la fin de la représentation de n en base 10?

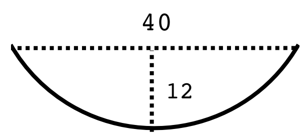
(b) Trouver un couple d'entiers positifs (a, b) satisfaisant $a^2 - b^2 = 2011$.

5. (a) Les cotés d'un rectangle sont comme ci-contre. Trouver une valeur numérique pour l'aire du rectangle.

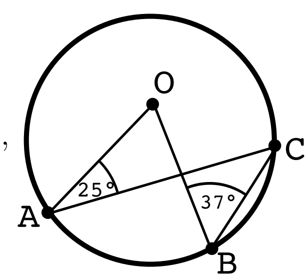


(b) Prouver que, pour chaque entier positif n, le nombre $n^3 + 2n$ est divisible par 3.

6. (a) Un ballon de plage, flottant sur un lac, n'a pas été enlevé avant que l'eau gèle. Il a laissé à la surface de la glace une impression de 12 cm de profondeur et de 40 cm de largeur. Quel est le rayon du ballon de plage?



(b) O est le centre du cercle du diagramme ci-contre, $\angle OAC = 25°$ et $\angle OBC = 37°$. Trouver $\angle AOB$.



7. $56a = 65b$, où a, b sont des entiers positifs. Prouver que $a + b$ est un nombre composé.

8. Trouver le plus petit entier positif n pour lequel $\dfrac{n - 11}{3n + 8}$ soit une fraction réductible non-nulle (i.e., le numérateur et le dénominateur ont un facteur commun plus grand que 1).

9. Une fonction f satisfait l'équation $f(x+1) = \frac{2f(x)+x}{3} + 1$ pour tous les nombres réels x. Supposons que $f(1000) = 2011$. Trouver la valeur de $f(2011)$.

10. Il existe des entiers positifs dont la valeur est quadruplée lorsque l'on déplace le chiffre le plus à droite vers la position la plus à gauche. Trouver le plus petit nombre ayant cette propriété.