COMPETITION MATHEMATIQUE DU MANITOBA 2010

Winnipeg Actuaries' Club

Pour les étudiants en $12^{\text{ème}}$ année
9:00 AM – 11:00 AM
Jeudi 25 Février 2010

Canadian Mathematical Society

Sponsors:
Club des actuaires de Winnipeg
Association des professeurs de mathématiques du Manitoba
Société Mathématique du Canada
Université du Manitoba

MAMT Manitoba Association of Mathematics Teachers

UNIVERSITY OF MANITOBA

REPONDEZ A AUTANT DE QUESTIONS QUE POSSIBLE. IL N'EST PAS ATTENDU QUE VOUS REPONDIEZ A TOUTES LES QUESTIONS. VEUILLEZ PRENDRE NOTE DU FAIT QUE CETTE FEUILLE COMPORTE EGALEMENT DES QUESTIONS AU VERSO. DES REPONSES NUMERIQUES SANS EXPLICATIONS N'OBTIENDRONT PAS LA NOTE MAXIMALE.

---

1. (a) Si $x^2 - y^2 = 39$ et $x + y = 3$, trouver $x - y$.

   (b) Résoudre pour x: $x + \sqrt{x} = 20$.

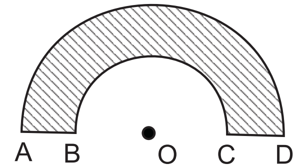
2. (a) Un magicien demande aux membres de son public de penser à un nombre. Ils doivent ajouter 3 à ce nombre. Le résultat doit être multiplié par 2. On soustrait 10 de ce nouveau résultat. Enfin, on divise ce dernier résultat par 2. Quand un membre du public lui communique la valeur obtenue, il annonce immédiatement le nombre choisi à l'origine. Quelle formule impliquant une seule étape peut-il utiliser pour convertir le résultat final trouvé par le public en le nombre choisi à l'origine?

   (b) Une pièce non truquée est lancée quatre fois. Quelle est la probabilité pour que face apparaisse trois fois et pile une fois seulement?

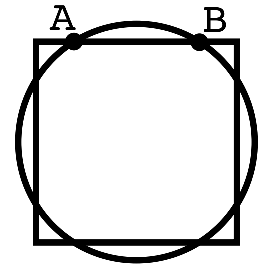
3. (a) En quels points est-ce que le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 3$ intersecte la parabole d'équation $y = 2x^2$?

   (b) Les trois droites d'équations $y = x - 7$, $x + y = 3$ et $y = kx + 8$ passent par un même point. Trouver la valeur de k.

4. (a) Les deux demi-cercles présentés dans la figure ci-contre ont pour centre O. Les points A, B, O, C et D sont colinéaires, et $AB = CD = 1$. La zone hachurée a pour aire 15π. Trouver la longueur de AD.



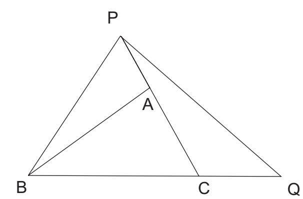
(b) Considérons un cercle et un carré dont les aires sont égales et ayant le même centre de symmétrie (voir la figure ci-contre). Si le rayon du cercle est 2, trouver la longueur de AB. (Exprimer la réponse en fonction de π.)



5. (a) Le nombre 64 est à la fois un carré parfait et un cube parfait. Trouver l'entier strictement positif suivant qui possède la même propriété.

   (b) Combien de solutions entières strictement positives x et y est-ce que $2x+3y=763$ admet?

6. Dans le schéma ci-contre, $AP = \frac{1}{3}PC$ et $CQ = \frac{1}{2}BC$. Prouver que l'aire de $\triangle BPA$ vaut les deux-tiers de l'aire de $\triangle CPQ$.



7. Cinq nombres entiers distincts sont ajoutés deux à deux, donnant les dix sommes

$$7, 11, 12, 13, 14, 18, 21, 22, 26, 28.$$

   Trouver les nombres, en justifiant la réponse par une série de déductions établissant clairement qu'il n'existe pas d'autre possibilité.

8. Une droite de pente 1 intersecte la parabole $y = x^2$ en A et B. Si la longueur du segment AB est 3, quelle est l'équation de la droite?

9. Résoudre pour x et y:

$$\begin{aligned} x + y + xy + 2 &= 0 \\ x^2 + y^2 + x^2y^2 - 16 &= 0 \end{aligned}$$

10. Les trois cotés d'un triangle rectangle ont une longueur entière. Montrer que l'aire du triangle:

    (a) est également entière;

    (b) est divisible par 3;

    (c) est un nombre paire.