COMPÉTITION MATHÉMATIQUE du MANITOBA 2015

Pour les étudiants en 12$^{\text{ième}}$ année
9:00 AM – 11:00 AM
Mardi 24 fevrier 2015

Soutenue par:

Club des actuaires de Winnipeg

Association des enseignants de mathématiques du Manitoba

Société mathématique du Canada

Université du Manitoba

Les questions sont au recto et au verso de cette page. Répondez à autant de questions que possible. Il n'est pas attendu que vous finissiez tout le devoir. **LES CALCULATRICES NE SONT PAS AUTORISÉES**. Des réponses numériques seules, sans explications, ne recevront pas la totalité des points.

---

1. (a) Résoudre pour x:
$$\frac{5}{x} - \frac{7+2x}{3x} = 3$$
   (b) Trouver le ratio de x sur y donnant
$$\frac{x-y}{x+y} = \frac{2}{5}$$

2. (a) Notons "$*$" l'opération suivante: $a * b = 2ab - b^3$. Evaluer $(4 * 3) * 2$.
   (b) Le prix d'origine d'un objet est réduit de 20%. Un mois plus tard, son prix réduit est doublé. A la fin de l'année, il est vendu à prix soldé. Quel pourcentage exact de démarque a-t-il été utilisé si le prix de vente est égal au prix d'origine?

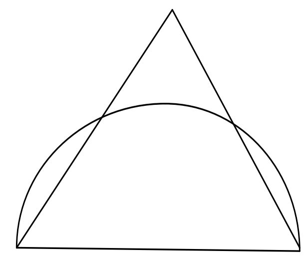
3. Dans une **suite de type Fibonacci**, chaque terme est la somme des deux termes précédents. Par exemple, la suite de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ et la suite de Lucas $1, 3, 4, 7, 11, 18, \ldots$ sont toutes deux des suites de type Fibonacci.
   (a) Le premier terme d'une suite de type Fibonacci est 4 et le cinquième terme est 2. Trouver le second, troisième et quatrième termes.
   (b) Si x, y, $2x-1$, $x+4$ est une suite de type Fibonacci, trouver les valeurs de x et y.

4. (a) Trouver toutes les paires de nombres réels (a, b) telles que $a^2 + 2ab + b^2 = 9$ et $a - b = 5$. Justifier votre réponse.

   (b) Trouver toutes les paires de nombres réels (a, b) telles que $a^2 - ab + b^2 = 0$. Justifier votre réponse.

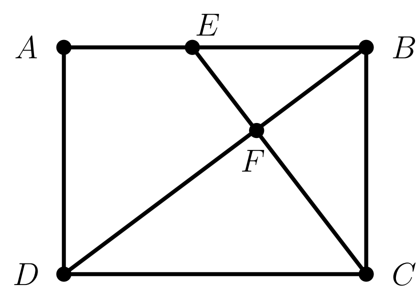
5. (a) Déterminer toutes les valeurs de a telles que la droite d'équation $x + y = a$ soit tangente au cercle d'équation $x^2 + y^2 = 25$.

   (b) L'un des côtés d'un triangle équilatéral est le diamètre, de 12 centimètres, d'un demi-cercle, comme représenté sur la figure. Déterminer l'aire de la partie du triangle en dehors du demi-cercle.



6. Les côtés d'un triangle rectangle sont de longueur $x+2$, $x+6$ et $2x$. Trouver toutes les valeurs possibles de x.

7. $ABCD$ est un rectangle. E est sur AB. CE intersecte la diagonale DB en F. ΔADE a une aire de 50. ΔEFB a une aire de 40. Trouver l'aire du rectangle $ABCD$.



8. Les droites $y = -2x + 12$, $x = 2$ et $y = mx$ intersectent et forment un triangle d'aire 2. Trouver toutes les valeurs possibles de m.

9. Soient A, B, C les sommets d'un triangle équilatéral, avec D un point intérieur au triangle tel que les longueurs de AD, BD et CD soient respectivement 3, 4 et 5. Quelle est l'aire du triangle?

10. L'expression $n!$ représente le produit $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ et se lit "factorielle n". Par exemple, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

    (a) Le produit $(2!)(3!)(4!)(5!)(6!)(7!)(8!)(9!)(10!)(11!)(12!)$ peut s'écrire sous la forme $M^2N!$, où M et N sont des entiers strictement positifs. Déterminer une valeur appropriée de N et justifier votre réponse.

    (b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $(2!)(3!)(4!) \cdots ((4n)!)$ peut s'écrire comme le produit d'un carré et d'une factorielle.