

# COMPETITION MATHÉMATIQUE DU MANITOBA 2007

Pour les étudiants en 12<sup>ème</sup> année  
9:00 AM – 11:00 AM  
Mardi 20 Février 2007

Sponsors:

Club des actuaires de Winnipeg  
Association des professeurs de mathématiques du Manitoba  
Société Mathématique du Canada  
Université du Manitoba

REPONDEZ A AUTANT DE QUESTIONS QUE POSSIBLE. IL N'EST PAS ATTENDU QUE VOUS REPONDIEZ A TOUTES LES QUESTIONS. VEUILLEZ PRENDRE NOTE DU FAIT QUE CETTE FEUILLE COMPORTE ÉGALEMENT DES QUESTIONS AU VERSO. DES REPONSES NUMÉRIQUES SANS EXPLICATIONS N'OBTIENDRONT PAS LA NOTE MAXIMALE.

---

---

- Si  $a$  est un nombre réel tel que  $a - \frac{1}{a} = \frac{5}{6}$ , trouvez la valeur numérique de  $a^2 + \frac{1}{a^2}$ .
  - Résoudre l'équation  $\frac{4}{x-1} - \frac{9}{x^2-1} = 4$ .
- Trouvez l'aire du triangle  $ABC$  si  $AC = BC = 6$  et  $\angle ACB = 120^\circ$ .
  - Si  $9 \cos^2 \theta = 6 \cos \theta - 1$ , trouvez la valeur numérique de  $\tan^2 \theta$ .
- Une droite de pente  $-2$  coupe l'axe des  $x$  positifs en  $A$  et l'axe des  $y$  positifs en  $B$ . Si l'aire du triangle  $AOB$  est de 7, quelle est l'équation de cette droite? (Dans ce problème,  $O$  désigne l'origine.)
  - Donnez un exemple d'équation quadratique dont les racines sont les carrés des racines de l'équation  $x^2 - 2x - 4 = 0$ .
- Les faces d'une boîte rectangulaire ont des aires de  $14 \text{ cm}^2$ ,  $20 \text{ cm}^2$  et  $70 \text{ cm}^2$ . Trouvez le volume de cette boîte.
  - Un cercle a pour centre le point  $(2, 1)$ . La droite d'équation  $3x - 4y + 8 = 0$  est tangente à ce cercle. Quelle est l'aire de ce cercle?

(Tournez SVP)

5. (a)

Dans la figure, la droite  $AB$  est parallèle à la droite  $DE$ . La droite  $CB$  est la bisectrice de  $\angle FCE$  et la droite  $CA$  est la bisectrice de  $\angle FCD$ . Démontrez que  $F$  est le milieu du segment de droite  $AB$ .

(b) Le cercle dans la figure a un rayon de 1. La longueur de la corde  $AB$  est 1, et la longueur de la corde  $BC$  est  $\sqrt{2}$ . Trouvez la longueur de la corde  $AC$ .

6. Si  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels, quelle est la plus petite valeur possible de

$$a(ab^2 + 3b) + 5?$$

7. Le point  $A$  est sur la droite d'équation  $y = 2x$ , le point  $B$  est sur la droite d'équation  $y = -2x$ , et la longueur du segment de droite  $AB$  est 2. Démontrez que les coordonnées du milieu de  $AB$  satisfont l'équation  $16x^2 + y^2 = 4$ .

8. Démontrez que si deux nombres premiers ont une différence de 2, et si les deux nombres sont plus grands que 4, alors leur somme est divisible par 12.

9. L'équation du cercle dans la figure est  $x^2 + y^2 = 25$ . Les cordes  $AB$  et  $CD$  ont leur intersection en  $P$ . La corde  $CD$  est parallèle à l'axe des  $x$  et est de longueur 6. La corde  $AB$  est de longueur 8, et  $\angle BPD = 45^\circ$ . Quelles sont les coordonnées du point  $P$ ?

10. (a) Démontrez qu'un triangle dans un rectangle d'aire  $A$  a une aire qui ne dépasse pas  $\frac{A}{2}$ .

(b) Utilisez la partie (a) pour démontrer que pour 9 points dans un carré d'aire 8, choisis de telle manière qu'aucun triplet de points ne soit colinéaire, il y a trois points qui sont les sommets d'un triangle d'aire au plus égale à 1.