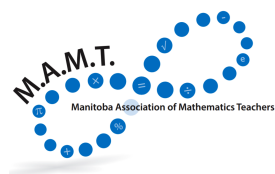


COMPÉTITION MATHÉMATIQUE du MANITOBA 2018

(pour les étudiants en 12^{ième} année)

Mardi 27 Février 2018, 9h00 à 11h00

Soutenue par :



UNIVERSITY
OF MANITOBA



-
- M.
 Mme.
 Mlle.

↑ Nom de l'étudiant (imprimer). Soulignez le nom de famille ↑

↑ Signature de l'étudiant ↑

↑ École de l'étudiant ↑

↑ Adresse de domicile de l'étudiant (ou Case postal #) ↑

↑ Ville/Village

Code postal ↑

Instructions pour les élèves : Avant que le concours commence, veuillez fournir les informations personnelles ci-haut. Ne placer aucune information personnelle permettant de vous identifier sur une quelconque autre page. Vous devriez avoir reçu 13 pages de papier au total, incluant celle-ci.

Répondre à toute question sur la feuille où elle se trouve. Vous pouvez utiliser les deux côtés de la feuille. Les deux dernières feuilles avec le code QR sont fournies pour les brouillons et pour compléter vos solutions en cas de manque d'espace. Le travail sur ces pages ne sera pas crédité à moins qu'il soit clairement indiqué à quelle question se réfère cette suite, puis que cette page soit spécifiée sur la page où le travail a débuté.

Lors de votre résolution d'une question particulière, ne pas référer au travail touchant d'autres questions ; les questions sont corrigées indépendamment.

Aucune aide est permise—aucune règle, compas ou autre appareil de dessin, instrument électronique (téléphone cellulaire, montre électronique, traducteur, tablette, calculatrice etc.).

Cet espace peut être utilisé pour le travail de scratch, mais ne continuez pas les solutions sur cette page. Aucun crédit ne sera accordé pour le travail apparaissant ici.

Question 1

- (a) Déterminer un entier plus grand que 1 qui laisse un reste de 1 lors de sa division par chacun de 2, 3, 4, 5 et 6.
- (b) Si $a^2 - b^2 = 42$ et $2a + 2b = 14$, déterminer $3a - 3b$.

Question 2

(a) Résoudre pour x :

$$x\sqrt{x+5} + 5\sqrt{x+5} = 8$$

(b) Résoudre pour a et b :

$$\begin{aligned} a + b &= 53 \\ \sqrt{a} - \sqrt{b} &= 5 \end{aligned}$$

Question 3

(a) Quelle est la somme des chiffres de $10^{50} - 5^5$?

(b) Évaluer la somme $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(100)$, où $f(k) = \frac{1}{4k^2 - 1}$.

Question 4

- (a) Déterminer la somme de tous les nombres à cinq chiffres dont tous les chiffres sont 2 ou 3.
- (b) Une suite de nombres réels est définie par $x_0 = 1$ et $x_{k+1} = \frac{2x_k - 4}{x_k + 2}$ pour $k \geq 0$. Déterminer la valeur de x_{2018} .

Question 5

-
- (a) Pour combien d'entiers positifs n est-ce que $\frac{n}{3}$ est un entier à trois chiffres et $6n$ est un entier à quatre chiffres ?
- (b) Supposer que a, b, c sont des nombres non nuls et que $ax+a = by+b = cz+c = a+b+c$. Utiliser cette information pour déterminer la valeur numérique de $xyz - (x + y + z)$.

Question 6

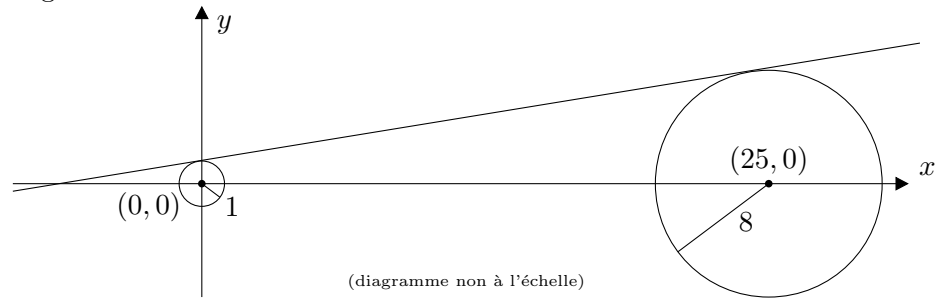
- (a) Démontrer que dans tout ensemble $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ consistant de quatre entiers, il y aura deux éléments qui diffèrent par un multiple de 3.
- (b) Démontrer qu'aucun entier positif peut avoir un carré de la forme $100k + 51$.

Question 7

La ligne $2x + y - 12 = 0$ intersecte la parabole $y = x^2 - 4x + 9$ dans les points A et B .
Si C est le sommet de la parabole, déterminer la surface de $\triangle ABC$.

Question 8

Un cercle de rayon 1 est centré à $(0, 0)$. Un second cercle de rayon 8 est centré à $(25, 0)$. Une ligne, située au dessus de ces cercles, est tangente aux deux cercles, comme indiqué. Déterminer l'équation de cette ligne.

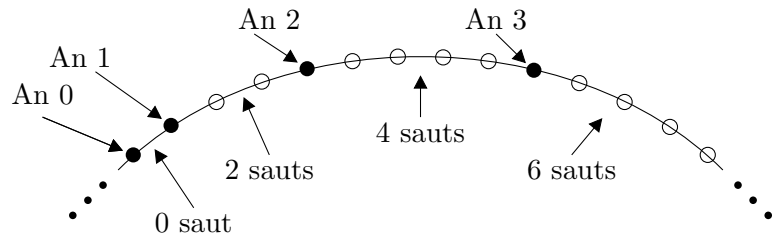


Question 9

Si p et q sont des nombres premiers consécutifs, tous les deux supérieurs à 3, démontrer que $p + q$ possède au moins 6 diviseurs positifs distincts. (Par exemple, $31 + 37 = 68$, qui est divisible par 1, 2, 4, 17, 34 et 68.)

Question 10

Une société secrète se rencontre une fois l'an au centre d'un cercle consistant de 101 lanternes également espacées. Dans l'an 0, une seule lanterne est allumée. Dans l'an 1, ils ont allumé la lanterne adjacente en direction horaire. Dans toute année k , ils procèdent de façon horaire, sautant (donc ne touchant pas) $2k$ lanternes et changent l'état de la prochaine lanterne (donc, dans l'an 2, ils sautent deux lanternes et dans l'an 3, ils sautent quatre lanternes, etc.—voir le diagramme) : Si cette lanterne est allumée, on l'éteint ; si elle est éteinte, on l'allume. Déterminer, avec preuve, le nombre de lanternes allumées après la rencontre de l'an 2018.



Page pour le travail de grattage ou de continuation.

Pour recevoir le crédit pour le travail continué ici :

1. Indiquez clairement dans votre solution que c'est continu et exactement où
2. Lorsque c'est continué, indiquez clairement quelle question est en cours
3. Ne pas mélanger le travail continu de différentes questions ou avec le travail de ferraille

Page pour le travail de grattage ou de continuation.

Pour recevoir le crédit pour le travail continué ici :

1. Indiquez clairement dans votre solution que c'est continu et exactement où
2. Lorsque c'est continué, indiquez clairement quelle question est en cours
3. Ne pas mélanger le travail continu de différentes questions ou avec le travail de ferraille

