COMPÉTITION MATHÉMATIQUE du MANITOBA 2013

Pour les étudiants en 12$^{\text{ème}}$ année
9h00 – 11h00
Jeudi 21 février 2013

Soutenue par:

le Club des actuaires de Winnipeg

l'Association des enseignants de mathématiques du Manitoba

la Société mathématique du Canada

l'Université du Manitoba

Regardez les trois pages. Répondez à autant de questions que possible. Il n'est pas attendu que vous finissiez tout le devoir. **LES CALCULATRICES NE SONT PAS AUTORISÉES**. Des réponses numériques seules, sans explications, ne recevront pas la totalité des points.

---

1. (a) Les angles d'un triangle sont en ratio $2:3:4$. Déterminer le plus grand des trois angles.

   (b) Les côtés d'un triangle sont de longueurs entières. Le triangle a une surface positive et un périmètre égal à 12. Combien de tels triangles existent?

2. (a) Résoudre $|x^2-6|=2$.

   (b) Les racines de l'équation quadratique

   $$3x^2+bx+c=0$$

   sont $2\pm\sqrt{3}$. Déterminer les valeurs de b et de c.

3. Dans chaque cas, résoudre pour x.

   (a) $4x=x^3+3x^2$.

   (b) $\dfrac{3}{x^2-1}=\dfrac{1}{x-1}$.

4. (a) Un historien divise les 2013 dernières années en 63 intervalles de temps, chacun de ces intervalles consistant d'un nombre entier d'années. Expliquer pourquoi il faut que deux de ces intervalles soient obligatoirement de même longueur.

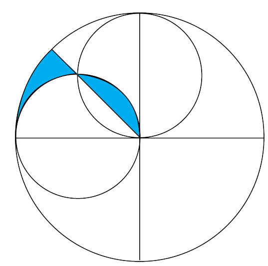
   (b) Considérer un jeu de dés, où le joueur A lance un dé ordinaire portant les nombres usuels 1, 2, 3, 4, 5, 6 sur ses faces. Le joueur B lance un dé de forme ordinaire, mais qui porte les nombres 3, 4, 5, 6, 7, 8 sur ses faces. Déterminer la probabilité exacte que le joueur B obtienne un nombre plus élevé.

5. (a) Étant donné que $ab = 10$, $bc = 12$ et $ad = 5$, déterminer

$$(a + c)(b + d).$$

   (b) Un rectangle est divisé en quatre sous-rectangles à l'aide de deux lignes perpendiculaires. Quatre des cinq nombres 6, 9, 10, 12, et 15 représentent les surfaces de ces quatre sous-rectangles. Lequel de ces cinq nombres ne fait pas partie de la liste? Pourquoi?

6. Le schéma suivant est dû à Léonard de Vinci. Deux diamètres, perpendiculaires l'un à l'autre, divisent le cercle en quatre parties. Sur chacun de ces diamètres, un cercle est tracé, de diamètre la moitié de l'original, puis tangent au cercle original et passant par le centre du cercle original. Un rayon du grand cercle est tracé, passant par le point d'intersection des petits cercles. Démontrer que les deux régions colorées ont la même surface.



7. Étant donné que $x^2 + y^2 = 4$ et $x + y = 1$, déterminer toutes les valeurs possibles de $x^3 + y^3$.

8. Soient A, B, C, X et Y des chiffres distincts et non nuls. Considérer la soustraction qui suit, puis un exemple concret où $(A, B, C) = (4, 5, 2)$).

$$\begin{array}{rccc} & A & B & C \\ - & C & B & A \\ \hline & 1 & X & Y \end{array} \qquad \text{Exemple:} \quad \begin{array}{rccc} & 4 & 5 & 2 \\ - & 2 & 5 & 4 \\ \hline & 1 & 9 & 8 \end{array}$$

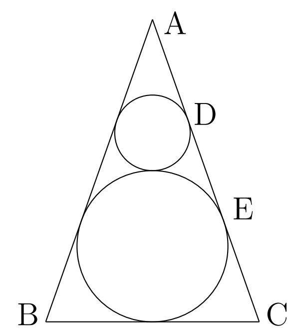
Il y a bien des façons où des valeurs de A, B et C peuvent être assignées et où le résultat du calcul est correct.

   (a) Démontrer que $X = 9$ et $Y = 8$, quelles que soient les valeurs de A, B et C.

   (b) Combien de triplets ordonnés (A, B, C) sont possibles?

9. Des cercles de rayons 1 et 2 sont tangents et le triangle isocèle ABC est tracé autours, tel qu'indiqué. Dans ce triangle, le côté AC est tangent au petit cercle au point D et au grand cercle au point E. Démontrer que

$$AD = DE = EC.$$



10. Trois cercles sont tangents les uns aux autres; le premier a son centre à $(0, 0)$ et son rayon est 4; le second a son centre à $(3, 0)$ et son rayon est 1; le troisime a son centre à $(-1, 0)$ et son rayon est 3. Déterminer le rayon d'un quatrième cercle, tangent à chacun de ces 3 cercles.